« Le trou noir de Schwartzschild »

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2$$

Métrique de Schwartzschild : solution symétrie sphérique statique (**sans charges** !)

Vitesse de libération d'un astre à symétrie sphérique (rayon R, masse $M) = c$

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r_s}}\ ; r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

« Le trou de vers »

On pose : $u = \pm\sqrt{r - r_s}$ $\quad r_s + u^2 = r$ donc

$$\left(1-\frac{r_s}{r}\right) = \left(\frac{u^2}{r_s+u^2}\right)$$

$$ds^2 = -c^2\left(\frac{u^2}{r_s+u^2}\right)dt^2 + \frac{r_s+u^2}{u^2}dr^2 + (\ r_s+u^2)^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2]$$

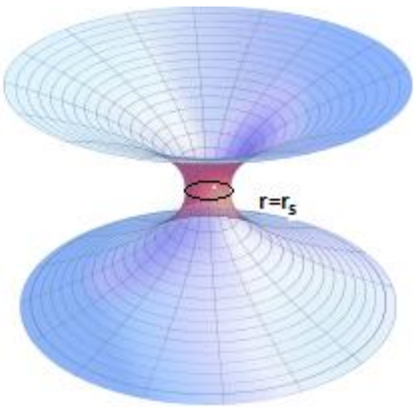
$$ds^2 = -c^2\left(\frac{u^2}{r_s+u^2}\right)dt^2 + \frac{r_s+u^2}{u^2}4u^2du^2 + (\ r_s+u^2)^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2]$$

$$ds^2 = -c^2\left(\frac{u^2}{r_s+u^2}\right)dt^2 + 4(r_s+u^2)du^2 + (r_s+u^2)^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2]$$

C'est le fameux pont **d'Einstein-Rosen** : Phys. Rev. **48**, (1935), 73

Cet espace 4-dim est décrit par deux « feuillets » : $u > 0$; $u < 0$ joints par un « hyperplan » défini par $u = 0$ soit $r = r_s$

Image :



« Le trou noir de Kerr »

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{r_s r}{A}\right)dt^2 - 2ca\frac{r_s r}{A}\sin^2(\theta)dtd\varphi + \frac{A}{B}dr^2 + Ad\theta^2$$
$$+ \left(r^2 + a^2 + a^2\frac{r_s r}{A}\sin^2(\theta)\right)\sin^2(\theta)d\varphi^2$$

$$A = r^2 + a^2 cos^2\theta$$

$$B = r^2 - r_s r + {\frac{J}{M^2c^2}}^2$$

$${\frac{J}{M^2c^2}}^2 = a^2$$

Métrique de Kerr : (**sans charges** !)

$$(R) - \frac{1}{2}R(g) = \frac{8\pi G}{c^4}(T)$$

$$R = g^{\mu\upsilon}R_{\mu\upsilon}$$

Symboles de Christoffel

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$$

Tenseur de Ricci

$$\mathrm{R}_{tt} = \frac{\partial \Gamma^i_{tt}}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Gamma^i_{ti}}{\partial t} + \Gamma^i_{tt}\Gamma^j_{ij} - \Gamma^j_{ti}\Gamma^i_{jt}$$